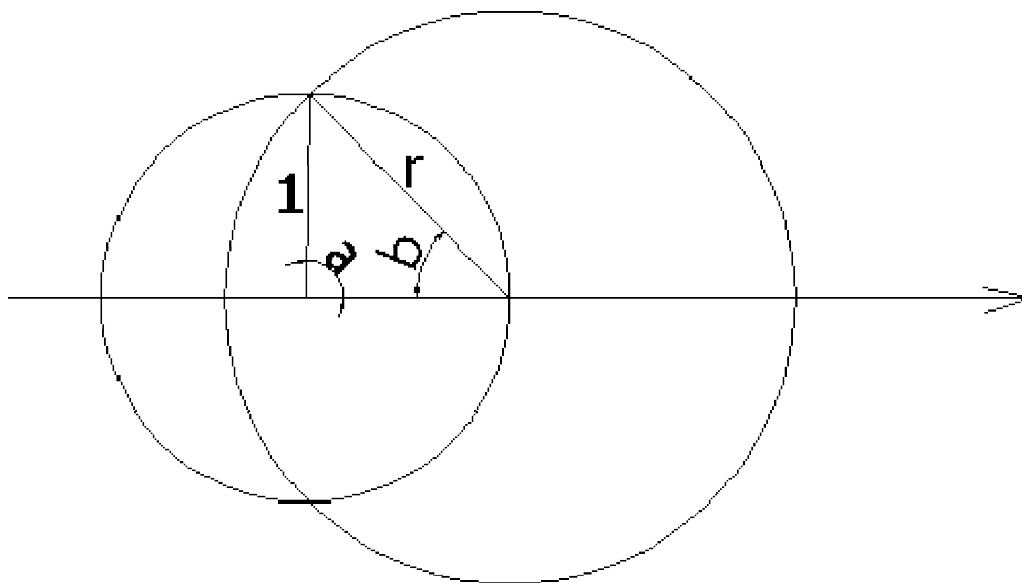


# Le problème de la chèvre

## Devoir de terminale S

Une chèvre est attachée sur le périmètre d'un pré circulaire de rayon 1 : calculer la longueur que doit avoir la corde pour qu'elle ne puisse brouter que la moitié du pré.

Ce problème, comme nous allons le voir, conduit à la résolution approchée d'une équation trigonométrique. Par la suite nous utiliserons les notations de la figure ci-dessous. Nous cherchons la valeur de  $r$  adéquate



1. Montrez que l'on a les deux relations suivantes :

$$\cos a + r \cos b = 1$$

$$\sin a - r \sin b = 0$$

2. En combinant de deux manières différentes ces deux relations, déduisez-en les deux relations suivantes :

$$\tan b = \frac{\sin a}{1 - \cos a}$$

$$r^2 + 2r(\cos a \cos b - \sin a \sin b) = 0$$

3. De la première de ces deux relations, déduisez la relation suivante en utilisant les formules trigonométriques faisant intervenir l'angle moitié :

$$\tan b = \frac{1}{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}$$

4. En travaillant cette dernière relation et en la combinant à la deuxième du 2 transformée, déduisez en que l'on a :

$$b = \frac{\pi - a}{2}$$

$$a = \pi - 2b$$

$$r = 2 \cos b$$

5. Exprimez les égalités d'aires correspondant au problème posé et remplacez toutes les occurrences de a et r par leur expression en fonction de b, puis travaillez l'équation obtenue jusqu'à trouver la relation suivante :

$$8b \cos 2b - 2 \sin b + \pi = 0$$

6. Montrez par une considération très simple que cette équation admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$  correspondant à notre problème et trouvez une valeur approchée à trois chiffres derrière la virgule de cette solution par une méthode de votre choix (j'ai trouvé 1.190).

---

Gilles Josse : Lycée La Pleïade - Pont de Cheruy (38) / [imel@ac-grenoble.fr](mailto:imel@ac-grenoble.fr) / 29 septembre 1998